



université de Caen  
Basse-Normandie



**ENSICAEN**  
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE CAEN  
& CENTRE DE RECHERCHE



**GREYC**



MASTER 2 LID

MÉMOIRE DE FIN D'ANNÉE D'ÉTUDE

---

Traitements d'images sur surfaces et des variétés.

---

*Auteur :*  
François LOZES

*Encadrant du stage :*  
Abder ELMOATAZ  
Olivier LÉZORAY

*Durée du stage :*  
6 mois (du 8 mars au 8 septembre)

*Lieu du stage :*  
Laboratoire image (GREYC)

*Année scolaire :*  
2010-2011

*Titre préparé :*  
Master informatique

# 1 Remerciements

Mon stage de fin d'étude master 2 LID, s'est déroulé dans les locaux du laboratoire image au GREYC à Caen.

Je remercie les personnes suivantes de m'avoir permis d'exercer dans de bonnes conditions mon stage de 6 mois au sein du laboratoire image : à commencer par Abderrahim Elmoataz, mon maître de stage, qui m'a guidé et conseillé tout au long de mon stage sur ce que je devais faire. Matthieu Toutain, mon collègue de Supinfo / LID pour être un très bon accompagnateur dans notre périple, pour ses conseils, ses aides dans le débogage du projet, ses conseils en imagerie. Xavier Desquesnes, pour son aide continue et son retour d'expérience en traitement d'images. Olivier Lézoray et Moncef Hidane, pour leur présence dans le bureau. Romain Goffe, pour sa Xbox360 (ça m'en fait deux :D). Benoit Gaüzère pour ce shooter plus qu'énorme. Vincent Roullier, pour avoir préparé la plupart des cafés que j'ai bus. Maher Kachour pour son humour. David Tschumperlé et les membres de la société Datexim, pour avoir participé aux parties de poker. Abdalla et Eli pour m'avoir accompagné dans nos pauses et m'avoir montré quelques endroits reposants de Caen. Je remercie particulièrement les personnes qui ont investi leur temps dans la préparation des pauses du premier jeudi de chaque mois, ou bien dans la préparation du café qui se trouvait devant les portraits de nos ancêtres à côté de la salle machine.

De même, je remercie les administrateurs réseaux, qui dépensent une grande partie de leur temps à l'efficacité, à la bienveillance, et au maintien du réseau du GREYC.

Je remercie également toutes les autres personnes que j'ai oubliées et qui doivent être remerciées comme il se doit dans cette section, Merci!!!

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Représentations actuelles d'une surface</b>	<b>6</b>
3.1	Cadre implicite et explicite . . . . .	6
3.1.1	Représentation implicite . . . . .	6
3.1.2	Représentation explicite . . . . .	7
3.1.3	Quelques critères des deux représentations . . . . .	8
3.2	EdPs sur graphes . . . . .	9
3.2.1	Définition . . . . .	9
3.2.2	Opérateurs de différence sur graphes . . . . .	10
3.2.3	Transcription d'EDP et méthodes variationnelles sur graphe . . . . .	12
<b>4</b>	<b>EDP sur graphe pour le lissage</b>	<b>13</b>
4.1	Débruitage de maillage . . . . .	13
4.1.1	Définition . . . . .	13
4.1.2	Applications . . . . .	14
4.2	Débruitage d'image sur maillage . . . . .	16
4.2.1	Définition . . . . .	16
4.2.2	Applications . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Segmentation d'une image sur maillage</b>	<b>20</b>
5.1	Rappel . . . . .	20
5.2	Extension sur graphe . . . . .	22
5.3	Autre méthode de régularisation . . . . .	22
5.4	Application . . . . .	23

<b>6 Conclusion</b>	<b>25</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>

## 2 Introduction

Actuellement l'imagerie 3D connaît une croissance importante. Les principales raisons en sont : l'augmentation de la précision des capteurs 3D, la diminution de leur coût de fabrication, et une plus grande accessibilité pour les particuliers (caméra haute définition dans les derniers téléphones portables, capteur 3D pour consoles de jeux). Cette croissance conduit naturellement à une augmentation des champs d'applications ayant en rapport avec l'imagerie 3D : imagerie médicale, imagerie industrielle ou réalité virtuelle (voir figure 2.1).

Les dernières années ont suscité un intérêt croissant, pour transposer des techniques de traitements d'images et de signaux considérés comme des fonctions définies sur des espaces euclidiens réguliers, sur des surfaces ou des images sur surfaces (qui sont des espaces non euclidiens irréguliers). En particulier, on constate un intérêt croissant pour transposer des méthodes variationnelles et d'EDPs pour traiter des surfaces ou des données définies sur des surfaces.

La littérature nous propose plusieurs approches pour étudier les images sur surfaces en utilisant des méthodes variationnelles d'EDP. On distingue grossièrement deux approches possibles pour étudier l'image sur surface, reflétant deux représentations de surfaces différentes : l'une dite représentation implicite, et l'autre dite représentation explicite. Ces deux représentations nécessitent l'application d'un prétraitement sur les données. L'approche que nous proposons dans ce mémoire est basée sur l'exploitation des EdPs (Équations aux différences partielles) sur graphes, il s'agit de représenter une surface discrète en un graphe pondéré et ne nécessite aucun prétraitement vu que les données vu que l'on manipule directement des données discrètes.

Dans une première partie nous verrons les différentes représentations possibles pour traiter des fonctions sur surfaces, nous présenterons à la fois les représentations proposées par la littérature ainsi que la représentation utilisée au sein du stage. Puis dans une seconde partie nous présenterons le traitement d'images sur surface en utilisant le cadre des EdPs sur graphe. Et nous terminerons par des résultats d'applications suivies de la conclusion.

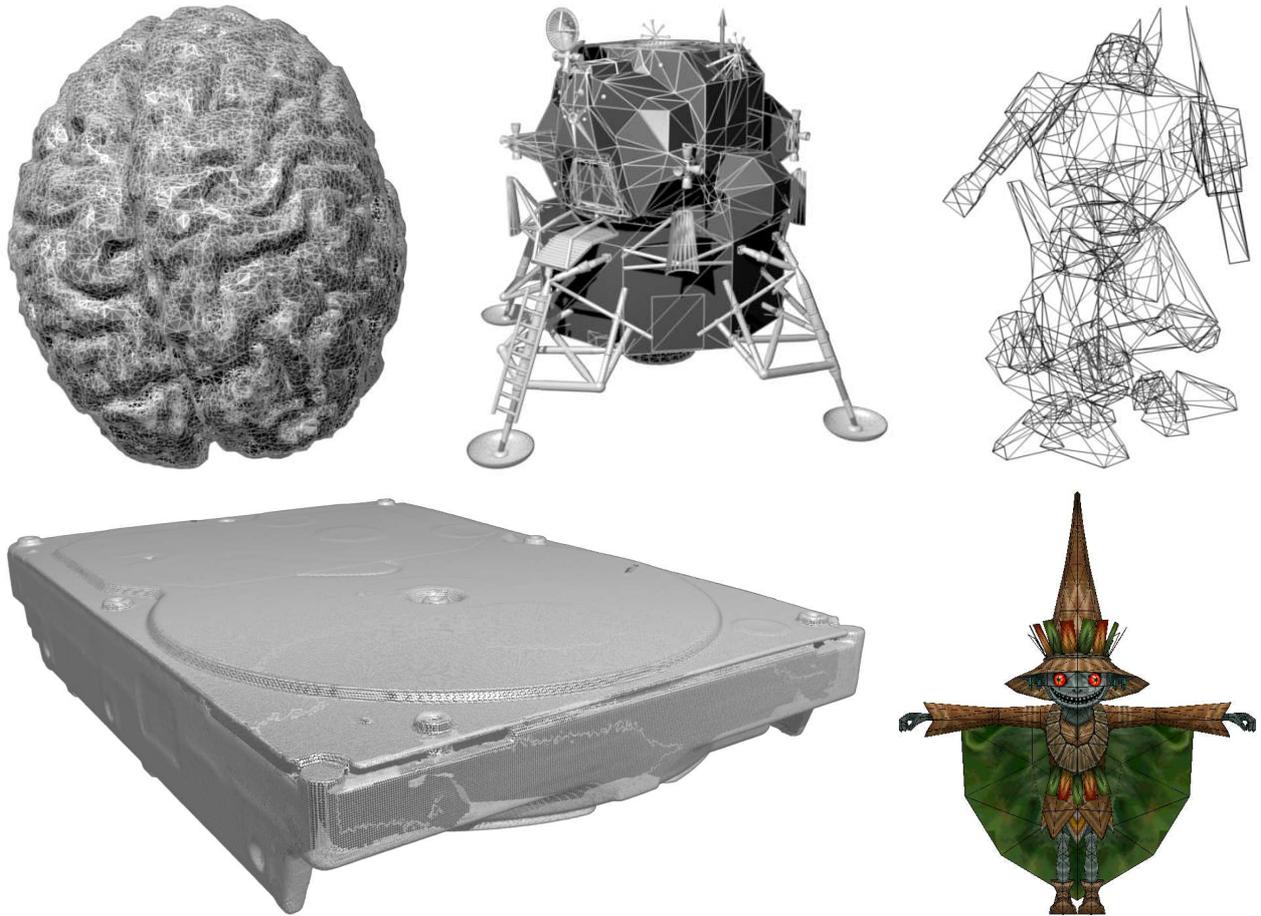


FIGURE 2.1 – Divers champs d’applications de l’imagerie 3D : médicale (cerveau), astronomie (vaisseau Apollo), jeux vidéo (TankJr. maillé et Skullkid texturé), industriel (disque dur).

# 3 Représentations actuelles d'une surface

Nous commencerons par présenter les approches utilisées actuellement pour représenter une surface, puis ferons une introduction sur une meilleure approche : le traitement par graphe.

## 3.1 Cadre implicite et explicite

### 3.1.1 Représentation implicite

La représentation implicite de surface (voir [BSCO00], [BCOS01], [Bur08]) consiste à plonger la surface à analyser dans un espace plus adapté pour faire des traitements sur surface, typiquement un espace euclidien de  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Une surface fermée  $\mathcal{S}$  est vue comme une fonction de niveau zéro d'une fonction de distance  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sur un domaine Euclidien. La fonction est négative à l'intérieur de la région, positive à l'extérieur et  $\mathcal{S} \equiv \{x \in \Omega : \psi(x) = 0\}$ .

Soit  $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une surface. Le principe est de traiter la surface en résolvant une EDP sur surface. Soit l'énergie à minimiser :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \|\nabla_{\mathcal{S}} u\|^2 d\mathcal{S} \quad (3.1)$$

Le minimum est obtenu en appliquant la descente de gradient suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{S}} u \quad (3.2)$$

avec  $\Delta_{\mathcal{S}} u$  le Laplacien intrinsèque.

L'idée est de résoudre les EDP sur surface avec l'aide de l'espace implicite. On approxime les opérateurs différentiels sur surfaces, en utilisant ceux de l'espace implicite, le long de la normale. Soit  $P_{\vec{N}}(\vec{v})$ , l'opérateur de projection d'un vecteur  $\vec{v} \in \Omega$  sur le plan orthogonal à  $\vec{N} \in \Omega$ , définit comme :

$$P_{\vec{N}}(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N} \quad (3.3)$$

avec  $|\cdot \cdot|$  le produit scalaire entre deux vecteurs de  $\Omega$ . La figure 3.1 illustre le calcul effectué.

L'énergie de l'équation 3.1 peut être réécrite en appliquant l'opérateur de projection  $P_{\vec{N}}()$  :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \|\nabla_{\mathcal{S}} u\|^2 d\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \|P_{\vec{N}}(\nabla_{\psi} u)\|^2 d\mathcal{S} \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^3} \|P_{\vec{N}}(\nabla_{\psi} u)\|^2 \delta(\psi) \|\vec{N}\| dx \quad (3.5)$$

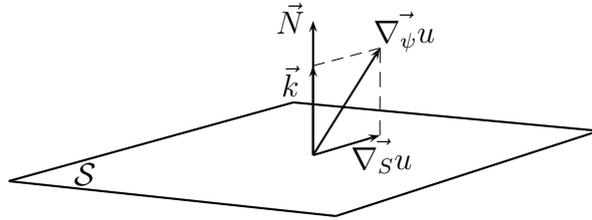


FIGURE 3.1 – Calcul du projeté orthogonal  $\nabla_S u$  de  $\nabla_\psi u$  sur la surface  $\mathcal{S}$ . Le vecteur  $\vec{N}$  est la normale à la surface  $\mathcal{S}$ , et  $\vec{k} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$ .

L'énergie obtenue est exprimée en fonction de l'espace implicite  $\Omega$ , avec :

$\vec{N}$  la normale à la surface  $\mathcal{S}$ .  $\|\vec{N}\|$  apparaît dans l'intégrale car  $\int_{\mathcal{S}} 1 d\mathcal{S} = \int_{\Omega} \|\vec{N}\| dx$ .

$\delta()$ , la distribution de Dirac.

$\nabla_\psi u$ , le gradient dans  $\Omega$ .

L'énergie est convexe, en utilisant Euler-Lagrange, nous pouvons montrer que le minimum est atteint lorsque le gradient est égale à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\|\vec{N}\|} \Delta \cdot (P_{\vec{N}}(\Delta_\psi u) \|\vec{N}\|) \quad (3.6)$$

avec  $\Delta \cdot$  l'opérateur de divergence. Si  $\|\cdot\| \in \mathbb{R}$  alors l'équation 3.6 peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \cdot (P_{\vec{N}}(\Delta_\psi u)) \quad (3.7)$$

Cette équation correspond à la résolution de l'équation de la chaleur intrinsèque, pour des données de la surface en utilisant un espace inclus dans  $\mathbb{R}^3$ . D'autres traitements sont possibles en modifiant l'énergie  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

L'avantage de cette approche est la facilité à manipuler un changement de topologie. Malheureusement les traitements rapides de l'espace euclidienne ne peuvent pas être portés facilement, les surfaces ouverte sont difficilement manipulable, et nécessite un prétraitement pour passer toutes les données dans le domaine de la fonction implicite.

### 3.1.2 Représentation explicite

L'autre approche est la représentation explicite (voir [Sta03], [PDS04]). Les surfaces sont représentées par des polygones maillés paramétrés, par exemple sous forme de patches triangulaires ou bien de patches quadrilatéraux. Nous introduisons des opérateurs différentiels pour résoudre l'équivalent d'une EDP continue sur surface.

Soit une surface  $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , une surface paramétrée :

$$P(\mathbf{u}) = \{x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} = (u^1, u^2) = (u, v) \in D\} \quad (3.8)$$

avec  $D$ , l'espace des coordonnées des points de la surface  $S$ . Soit  $G = (G_{i,j})$  avec  $G_{i,j} = \langle P_i, P_j \rangle$  le tenseur métrique de Riemann, avec  $P_i = \frac{\partial P(u)}{\partial u^i}$ .

Soit la fonction  $I : S \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction contenant les données à traitées. Le gradient sur surface

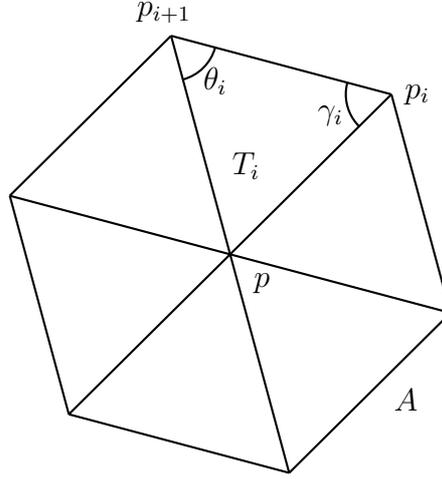


FIGURE 3.2 – Représentation des angles  $\theta_i$  et  $\gamma_i$  d'un point  $p \in T_i$ .

$\nabla_p I(x)$  s'exprime avec l'aide du tenseur métrique  $G$  :

$$\nabla_p I(x) = \nabla_{u,v} I(x) \quad (3.9)$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 G^{i,j} \frac{\partial I}{\partial u^i} P_i \quad (3.10)$$

avec  $G^{i,j} = (G^{-1})_{i,j}$ .

L'opérateur Laplacien  $\Delta_g$  sur les données  $I$  s'exprime comme :

$$\Delta_g I = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta |\nabla_{u,v} I|^2}} \operatorname{div} \left( \sqrt{1 + \beta |\nabla_{u,v} I|^2} \nabla_{u,v} I \right) \quad (3.11)$$

Les auteurs de [PDS04], ont montré qu'en travaillant sur une paramétrisation triangulaire de la surface  $S$ , l'opérateur Laplacien  $\Delta_g$  en un point  $p \in S$  peut être approximé avec :

$$\widehat{\Delta_g I(p)} = \frac{\phi(|\widehat{\Delta_S I(p)}|)}{A} \sum_{T_i \in A} \phi \left( |\widehat{\nabla_S I(p)}| \right) (\cot \theta_i (I(p_i) - I(p)) + \cot \gamma_i (I(p_{i+1}) - I(p))) \quad (3.12)$$

avec  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi(|\nabla_S I(x)|) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta |\nabla_S I(x)|^2}}$  une fonction de distance inverse. Voir la figure 3.2 pour la localisation des angles  $\theta_i$  et  $\gamma_i$  dans le triangle  $T_i$ .

Le problème est qu'il est très difficile de paramétrer un modèle arbitraire, surtout ceux qui ont un genre<sup>1</sup> élevé.

### 3.1.3 Quelques critères des deux représentations

Les deux approches ont le même but : celle de convertir le problème sur surface en problème euclidien (voir figure 3.1 pour un résumé des deux approches présentés). À l'inverse, l'approche que nous avons adoptée ne nécessite aucun traitement : elle consiste à analyser directement les données discrètes de la surface. De plus elle permet de traiter les surfaces quelques soit sa topologie.

---

1. nombre de trous dans le modèle.

Méthode	Principe	Avantage	Désavantage
Représentation implicite (level-set)	La fonction est vue comme une fonction de niveau zéro	Facilité à manipuler des changements topologiques	Toutes les données ont besoin d'être étendues sur une bande étroite autour de la surface et difficulté à adapter les algorithmes rapides à des cas euclidiens
Représentation explicite	Paramétrer des patches d'une surface en coordonnées euclidiennes	Les opérateurs différentiels sont calculés facilement	Difficulté à paramétrer des surfaces arbitraires et à manipuler des changements topologiques

TABLE 3.1 – Résumé des deux grandes approches proposées actuellement.

Nous allons maintenant voir une approche récente pour résoudre des problèmes sur maillage, ou d'images sur maillage, basé sur l'utilisation des graphes. Cette approche a déjà été utilisée dans le cadre de traitement d'image, ou de maillage. Nous allons voir en quoi l'utilisation des graphes peut être utile pour traiter des images qui se trouvent sur un maillage.

## 3.2 EdPs sur graphes

Soit une surface  $S$  à traiter. On suppose que l'on est capable de récupérer une représentation discrète  $S_D$  de la surface  $S$ , avec  $S_D$  constituée d'une collection de polygones interconnectés entre eux. La surface  $S_D$  peut être vue comme un graphe particulier  $G = (V, E, w)$ . Les données sur surface peut être représenté par une fonction  $f : V \subset \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La mesure de similarité  $w$  utilisée peut dépendre d'information géométrique ou photométrique.

Ce graphe est une structure naturelle pour représenter des données discrètes (voir [NBW06], [CSZ06], [JR94]). [ELB08], [BEM09] ont proposés le cadre des EdPs sur graphes, pour transposer des méthodes variationnelles et EDP continues dans un cadre discret pour le traitement d'images. Dans notre cas l'idée est de représenter le maillage comme un graphe, et de traiter ce graphe.

Dans un premier temps nous allons présenter ce qu'est un graphe, puis nous verrons les opérateurs fondamentaux, et nous terminons par quelques EDP de diffusions et sur leurs résolutions.

### 3.2.1 Définition

Un graphe pondéré  $G = (V, E, w)$  est constitué d'un ensemble fini  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$  de  $N$  sommets et un ensemble fini  $E \subset V \times V$  d'arêtes pondérés. Soit  $(u, v)$  une arête connectant les sommets  $u$  et  $v$  de  $V$ , le poids en cette arête est noté  $w(u, v)$ , ce dernier représente la similarité entre les sommets incident à l'arête associée. Les poids sont calculés en utilisant une fonction  $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant,  $w(u, v) = w(v, u)$  pour tout  $(u, v) \in E$  (relation symétrique) et  $w(u, v) = 0$  si  $(u, v) \notin E$ . La fonction de poids  $w$  peut dépendre de caractéristiques géométriques (angles, normales) ou bien photométrique (couleur des pixels d'une image qui se trouve sur le maillage). Soit  $N(u)$  le voisinage au sommet  $u$ , c.à.d. le sous-ensemble de sommets partageant une arête avec  $u$ . Nous supposons que les graphes utilisés sont connexes, unidirectionnel et sans boucle fermée.

Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction vectorielle réelle discrète de dimensions  $n$  assignant une valeur  $f(u)$

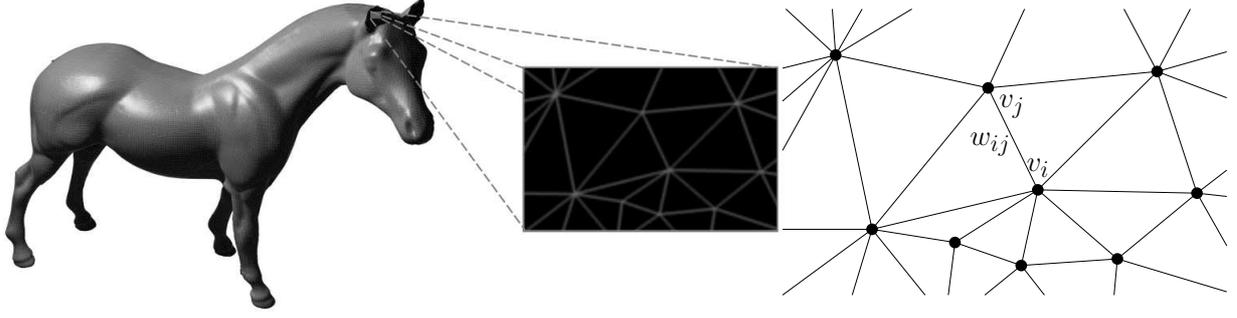


FIGURE 3.3 – Création d’un graphe à partir d’un maillage. Le poids  $w_{ij}$  représente la similarité entre les sommets  $v_i$  et  $v_j$ .

à chaque sommet  $u \in V$ . Nous notons  $\mathcal{H}(V)$  l’espace de Hilbert des fonctions définies sur l’ensemble  $V$ . Dans le cas de l’étude de maillage, le graphe créé sera l’équivalent du maillage, et la valeur  $f(u)$  peut être par exemple la coordonnée du sommet (avec  $n = 3$ ) si on souhaite traiter le maillage, ou bien une donnée colorimétrique (avec  $n = 3$  si données en LAB, ou  $n = 1$  pour une intensité) si on veut traiter l’image qui se trouve sur le maillage. La figure 3.3 illustre la procédure de création d’un graphe à partir d’un maillage.

Nous allons maintenant définir les opérateurs qui vont nous être utiles pour nos traitements.

### 3.2.2 Opérateurs de différence sur graphes

Nous allons présenter les opérateurs qui seront utilisés dans nos traitements. Le lecteur désireux d’en apprendre plus est invité à lire [ELB08], [BEM09], [TEL11], [Ta09].

L’opérateur de différence pondéré est l’opérateur servant de base pour les autres opérateurs. Considérons un graphe pondéré  $G = (V, E, w)$  et une fonction  $f \in \mathcal{H}(V)$ , l’opérateur de différence pondéré de  $f$  au sommet  $u$  selon l’arête  $uv \in E$  est :

$$(d_w f)(uv) = \sqrt{w_{uv}}(f(v) - f(u)) \quad (3.13)$$

La différence pondérée externe  $d_w^+ : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(E)$  basée sur l’opérateur max est défini comme :

$$(d_w^+)(uv) = \sqrt{w_{uv}} (\max(f(v), f(u)) - f(u)) \quad (3.14)$$

La différence pondérée interne  $d_w^- : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(E)$  basée sur l’opérateur min est défini comme :

$$(d_w^-)(uv) = \sqrt{w_{uv}} (f(u) - \min(f(u), f(v))) \quad (3.15)$$

Soit  $G(V, E, w)$  un graphe, et  $F \in \mathcal{H}(E)$ , l’opérateur adjoint  $(d_w^* F)(u)$  est défini comme :

$$(d_w^* F)(u) = \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} (F(vu) - F(uv)) \quad \text{avec } u, v \in V \text{ et } (uv) \in E \quad (3.16)$$

La divergence sur graphe  $div F$  est défini comme :

$$div F = -d_w^* F \quad (3.17)$$

$$= \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} (F(uv) - F(vu)) \quad (3.18)$$

L'opérateur dérivée appliquée à une arête  $uv \in E$  est :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial uv} \right|_u = \partial_v f(u) = (d_w f)(uv) \quad (3.19)$$

L'opérateur gradient pondéré  $\nabla_w : \mathcal{H}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'une fonction  $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$  en un sommet  $u \in V$  est défini comme étant le vecteur de toutes les différences pour l'ensemble des arêtes de  $E$  :

$$(\nabla_w f)(u) = ((d_w f)(uv))_{uv \in E}^T \quad (3.20)$$

De même l'opérateur gradient pondéré externe  $\nabla_w^+ : \mathcal{H}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  et l'opérateur gradient pondéré interne est défini comme :

$$(\nabla_w^+ f)(u) = ((d_w^+ f)(uv))_{uv \in E}^T \quad (3.21)$$

$$(\nabla_w^- f)(u) = ((d_w^- f)(uv))_{uv \in E}^T \quad (3.22)$$

Pour mesurer les variables locales en un sommet  $u \in V$ , nous pouvons utiliser la norme  $\mathcal{L}_q$  du gradient pondéré :

$$\|(\nabla_w f)(u)\|_q = \left[ \sum_{v \sim u} w_{uv}^{q/2} |f(v) - f(u)|^q \right]^{1/q} \quad (3.23)$$

avec la notation  $v \sim u$  représentant l'ensemble des sommets  $v \in V$  au voisinage du sommet  $u$ .

L'opérateur  $p$ -Laplacien isotrope décrit une famille d'opérateur de second ordre. Il est défini comme :

$$\Delta_{w,p}^i f(u) = d_w^* (\|(\nabla_w f)(u)\|^{p-2} d_w f(u)) \quad (3.24)$$

$$= \sum_{v \sim u} w_{uv} (\|(\nabla_w f)(u)\|_2^{p-2} + \|(\nabla_w f)(u)\|_2^{p-2}) (f(u) - f(v)) \quad (3.25)$$

Cette opérateur correspond à la régularisation de l'équivalent discret de l'énergie  $p$ -Dirichlet :

$$D(f) = \frac{1}{p} \sum \|\nabla_w f\|^p \quad (3.26)$$

Pour  $p = 2$ , nous obtenons l'opérateur de Laplace (linéaire) :

$$\Delta_{w,2}^i f(u) = d_w^* (d_w f(u)) \quad (3.27)$$

$$= \sum_{v \sim u} w_{uv} (f(u) - f(v)) \quad (3.28)$$

Pour  $p = 1$  nous obtenons la courbure moyenne (non linéaire) :

$$\Delta_w^1 f(u) = \kappa_w f(u) \quad (3.29)$$

$$= d_w^* \left( \frac{d_w f(u)}{\|(\nabla_w f)(u)\|} \right) \quad (3.30)$$

$$= \sum_{v \sim u} w_{uv} \left( \frac{1}{\|(\nabla_w f)(u)\|_2} + \frac{1}{\|(\nabla_w f)(v)\|_2} \right) (f(u) - f(v)) \quad (3.31)$$

Le  $p$ -Laplacien anisotrope est défini comme :

$$\Delta_{w,p}^a f(u) = d_w^* (|d_w f(u)|^{p-2} d_w f(u)) \quad (3.32)$$

$$= \sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} |(f(u) - f(v))|^{p-2} (f(u) - f(v)) \quad (3.33)$$

Pour  $p = 2$ , le  $p$ -Laplacien anisotrope est égale au  $p$ -Laplacien isotrope :

$$\Delta_{w,2}^a f(u) = \Delta_{w,2}^i f(u) = \sum_{v \sim u} w_{uv} (f(u) - f(v)) \quad (3.34)$$

Pour  $p = 1$ , le  $p$ -Laplacien anisotrope s'écrit comme :

$$\Delta_{w,1}^a f(u) = \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} \operatorname{sign}(f(u) - f(v)) \quad (3.35)$$

### 3.2.3 Transcription d'EDP et méthodes variationnelles sur graphe

Avec ces opérateurs de différence sur graphes, qui consiste en l'analogue discret des opérateurs différentiels, il devient possible de transcrire toute EDP (ou toute énergie définie sur un espace euclidien) en une énergie sur graphe.

Soit l'énergie suivante :

$$E(f) = J(f) + \lambda H(f, f^0) \quad (3.36)$$

avec  $J(f)$  défini sur  $\Omega$  comme :

$$J(f) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla f|^p \quad (3.37)$$

L'analogue sur un graphe  $G(V, E, w)$  de l'énergie  $J(f)$ , s'écrit :

$$J_G(f) = \frac{1}{p} \sum_{v \in V} |\nabla_w f|^p \quad (3.38)$$

# 4 EDP sur graphe pour le lissage

À partir des opérateurs vus précédemment, nous allons montrer comment résoudre des problèmes de restauration de fonctions sur maillages en transposant certaines méthodes variationnelles et EDP continues dans un cadre discret. Nous allons poser nos problèmes en utilisant les méthodes variationnelles basées sur les équations aux dérivées partielles (voir [AGLM93], [CS05], [AK06]). Nous allons vous présenter pour chacun des traitements, comment nous avons fait pour créer le graphe, ainsi que les résultats obtenus en faisant varier les paramètres. Les différents traitements ont été réalisés avec le logiciel libre Blender<sup>1</sup> sur une machine tournant sous GNU/Linux.

## 4.1 Débruitage de maillage

### 4.1.1 Définition

Soit une fonction  $h : V \rightarrow R^m$  ayant subi une déformation  $\eta$ , par exemple un bruit additif  $\eta$ , nous avons la relation suivante :

$$f^0 = h + \eta \quad (4.1)$$

$f^0$  est la donnée observée, le but est de retrouver la donnée d'origine  $h$  à partir de  $f^0$ . Ce problème est mal posé (voir [BG94]). Pour que la solution dépende continument des données initiales  $h$ , nous devons réguler les données observées  $f^0$ .

Le débruitage de maillage a pour objectif de restaurer un maillage ayant subi une déformation. Les données à traiter seront donc des coordonnées dans  $R^3$ . Soit un graphe  $G(V, E, w)$ , et une fonction  $f^0 : V \rightarrow R^3$ , représentant les données en entrées. Le problème revient à minimiser l'énergie  $E$ , typiquement de la forme suivante :

$$E = E_R + \lambda E_D \quad (4.2)$$

$E_R$  est le terme de régularisation qui mesure la régularité de la fonction régularisée  $f$ .  $E_D$  est un terme d'attache aux données qui mesure la proximité de la fonction régularisée  $f$  par rapport une fonction initiale (ex :  $f^0$ ), typiquement une différence quadratique. Cette énergie est pondérée par le paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le multiplicateur de Lagrange, avec  $\lambda \geq 0$  qui contrôle la proportion entre l'énergie de régularisation et celle d'attache aux données. Définissons les termes  $E_R(f)$  et  $E_D(f, f^0)$  :

$$E_R(f) = \frac{1}{p} \sum_{x \in V} |\nabla_w f(x)|^p \quad (4.3)$$

$$E_D(f, f^0) = \lambda |f^0 - f|^2 \quad (4.4)$$

---

1. voir <http://www.blender.org/>

$E_R(f)$  est l'énergie  $p$ -Dirichlet avec  $p \in \mathbb{R} \mid 0 < p < \infty$ .

L'énergie  $E(f, f^0, \lambda)$  s'écrit comme :

$$E(f, f^0, \lambda) = \frac{1}{p} \sum_{x \in V} |\nabla_w f(x)|^p + \lambda |f^0 - f|^2 \quad (4.5)$$

On a une famille d'opérateur paramétrée par  $p, w$  ou  $\lambda$ .

Le minimum est obtenu en faisant une descente de gradient. La procédure de résolution est réduite à l'algorithme itératif suivant :

$$\begin{cases} f^{(t+1)} &= f^{(t)} - \Delta t \frac{\partial E(f)}{\partial f(x)} \\ f^{(0)} &= f^0 \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $\Delta t \in \mathbb{R}$  un paramètre pour contrôler le pas de descente. Pour arrêter l'itération, soit on fixe un nombre de boucle, ou alors on test si  $d(f^{(t+1)}, f^{(t)}) < \beta$ , avec  $d : H(V) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de distance et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Dans l'expérience qui suit, nous fixons le nombre de boucles à 500, l'algorithme lancé devient :

---

**Algorithm 1** Filtrage de maillage

---

```

1:  $f^{(0)} := f^0$ 
2: for  $t := 0 \rightarrow 500$  do
3:    $f^{(t+1)} := f^{(t)} - \Delta t \frac{\partial E(f)}{\partial f(x)}$ 
4: end for

```

---

Pour  $p \geq 1$  cette énergie est convexe. Pour  $p = 1$ , l'énergie  $E(f, f^0, \lambda)$  devient :

$$E(f, f^0, \lambda) = \sum_{x \in V} |\nabla_w f(x)| + \lambda |f^0 - f|^2 \quad (4.7)$$

avec  $\sum_{x \in V} |\nabla_w f(x)|$  correspondant à l'équivalent discret sur graphe de la variation totale.

## 4.1.2 Applications

Soit un graphe  $G(V, E, w)$  et une fonction sur surface  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  associant un sommet à sa coordonnée géométrique dans  $\mathbb{R}^3$ . Reprenons l'énergie de l'équation 4.8 et supprimons le terme d'attache aux données avec  $\lambda = 0$ . L'énergie  $E(f, f^0)$  s'écrit maintenant :

$$E(f, f^0) = \frac{1}{p} \sum_{x \in V} |\nabla_w f(x)|^p \quad (4.8)$$

En appliquant l'équivalent discret Euler-Lagrange, nous obtenons le  $p$ -Laplacien :

$$\frac{\partial E(f)}{\partial f(x)} = \Delta_{w,p} f(x) \quad (4.9)$$

La figure 4.1 présente l'évolution du filtrage d'un cochon, à travers plusieurs itérations avec la fonction de poids  $w = 1$  et  $p = 2$ .

La figure 4.2 affiche des résultats de débruitage d'un maillage précédemment déformé par un bruit uniforme avec  $w = 1$  et  $p = 2$ .

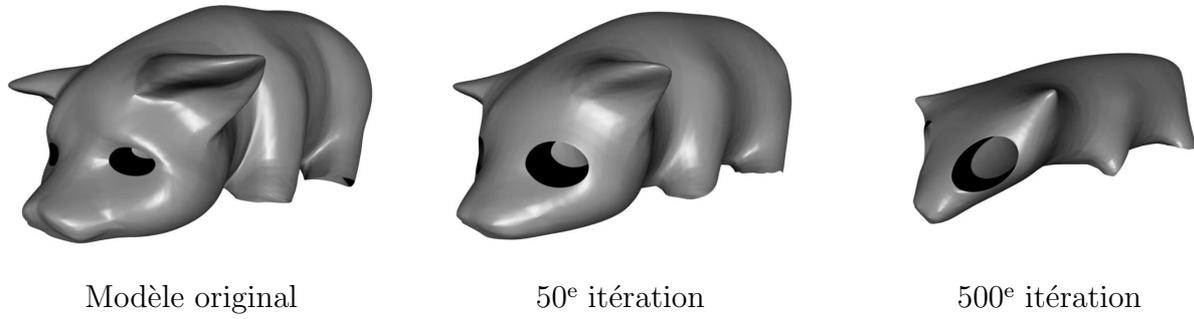


FIGURE 4.1 – Filtrage d'un cochon avec  $w = 1$  et  $p = 2$ .



FIGURE 4.2 – Débruitage d'un chameau avec  $w = 1$  et  $p = 2$ . De gauche à droite respectivement : le modèle original, le modèle bruité, le modèle débruité.

## 4.2 Débruitage d'image sur maillage

### 4.2.1 Définition

Le débruitage d'image sur maillage consiste à restaurer l'image qui se trouve plaquée sur le maillage. Nous allons travailler avec le même graphe  $G(V, E, w)$ . L'énergie à minimiser reste de la forme définie dans l'équation 4.8 :

$$E(f, f^0, \lambda) = \frac{1}{p} \sum_{x \in V} |\nabla_w f(x)|^p + \lambda |f^0 - f|^2 \quad (4.10)$$

Les modifications portent sur la fonction  $f : V \in C$  à traiter : les données ne sont plus dans  $\mathbb{R}^3$  mais dans  $C$ , avec  $C$  l'espace des couleur, par exemple en niveau de gris.

De la même manière que, nous pouvons obtenir un minimum, en faisant une descente de gradient :

$$\begin{cases} f^{(t+1)} &= f^{(t)} - \Delta t \frac{\partial E(f)}{\partial f(x)} \\ f^{(0)} &= f^0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Utilisons l'équivalent discret de variation totale régularisée comme énergie de régularisation  $E_R(f)$  (voir [ROF92]), correspondant au cas  $p = 1$ , nous avons donc :

$$E_R(f) = \sum_{x \in V} \sqrt{|\nabla_w f(x)|^2 + \epsilon^2} \quad (4.12)$$

L'énergie  $E(f, f^0, \lambda)$  à minimiser s'écrit maintenant :

$$E(f, f^0, \lambda) = \sum_{x \in V} \sqrt{|\nabla_w f(x)|^2 + \epsilon^2} + \frac{\lambda}{2} (f(x) - f^0(x))^2 \quad (4.13)$$

L'énergie  $E(f, f^0, \lambda)$  obtenue à l'équation 4.13, est composée de 2 termes strictement convexe (voir [COS01]). En utilisant l'analogie discret Euler-Lagrange nous obtenons facilement l'expression suivante (voir [PM87]) :

$$\frac{\partial E(f)}{\partial f(x)} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla_w f(x)|^2 + \epsilon^2}} \Delta f(x) + \lambda (f(x) - f^0(x)) \quad (4.14)$$

Nous obtenons le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} f^{(t+1)}(x) &= f^{(t)}(x) - \Delta t \left( \frac{1}{\sqrt{|\nabla_w f(x)|^2 + \epsilon^2}} \Delta f(x) + \lambda (f(x) - f^0(x)) \right) \\ f^{(0)} &= f^0 \end{cases} \quad (4.15)$$

avec  $\Delta t \in \mathbb{R}$ , un paramètre pour contrôler le pas de descente.

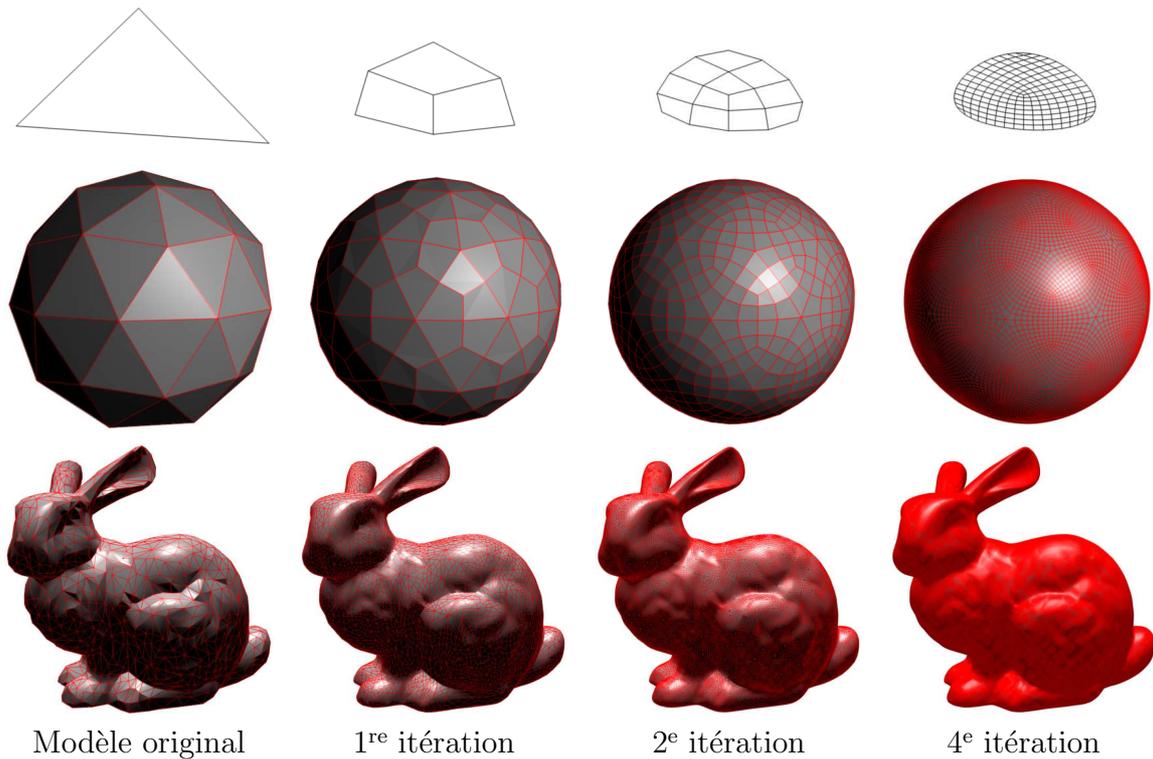


FIGURE 4.3 – Subdivision de Catmull-Clark de maillages polygonaux pour rendre les maillages plus fins.

## 4.2.2 Applications

Vu que les sommets du maillage sont la base des nœuds du graphe, la valeur colorimétrique qui sera traitée, sera celle qui se trouve au niveau des sommets du maillage. Si on prend le maillage tel qu'il est donné en entrée, les données traitées ne correspondent qu'à une petite partie de l'image, vu que nos maillages ne sont pas fins. Pour surmonter le problème nous avons procédé à une subdivision de Catmull et Clark sur le maillage (voir [CC78]), cela à pour conséquence d'augmenter le nombre de sommets du maillage mais aussi d'arrondir les discontinuités. La figure 4.3 montre l'évolution des subdivisions et leurs impacts sur un triangle, ainsi que sur une sphère et sur le lapin de Stanford. Le modèle obtenu semble plus détaillé et nous avons une granularité plus fine sur l'image à traiter.

La figure 4.4 présente les résultats du filtrage de l'image sur maillage, à travers plusieurs itérations en faisant varier la fonction de poids  $w$ . Les résultats de la première ligne sont obtenus avec  $w = 1$  donc en prenant en compte uniquement l'information géométrique. Ceci à pour conséquence, la perte de détails comme les contours et le résultat converge vers la moyenne de l'image. Tandis que les résultats de la dernière ligne s'appuient sur l'information à la fois géométrique et photométrique, en utilisant une fonction exponentielle inverse comme fonction de poids  $w$ . Cette dernière reçoit en entrée la donnée colorimétrique des pixels de l'image. Les résultats montrent que nous gardons les contours de l'image dans cette configuration là.

La figure 4.5 présente le résultat du filtrage d'une tasse de thé, en utilisant l'information géométrique et photométrique sur un voisinage local. Nous pouvons voir que des éléments de la texture ont été perdus, donc il serait intéressant, pour les futurs travaux, d'intégrer l'information photométrique sur

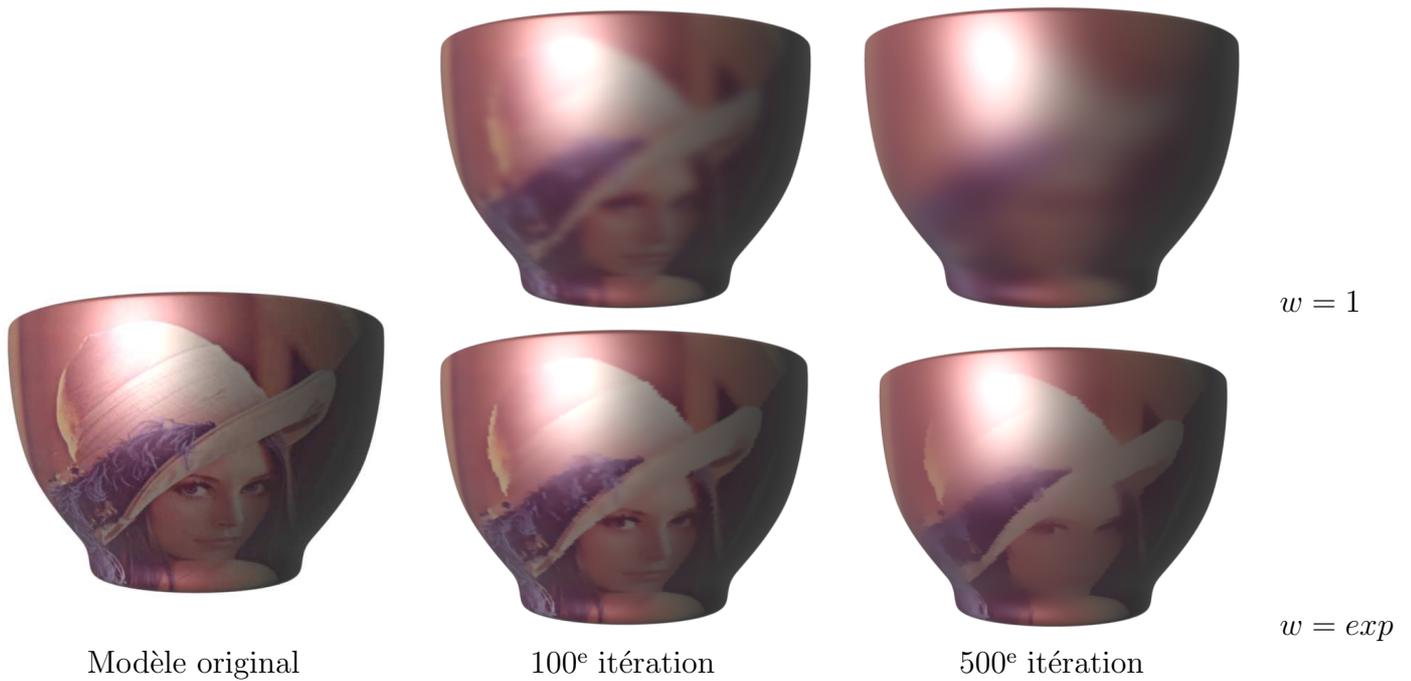


FIGURE 4.4 – Filtrage d’image sur maillage.

le voisinage non locale qui dépend de la texture.

La figure 4.6 illustre différentes expériences sur l’effet de la modification du paramètre  $p$ , en appliquant le  $p$ -Laplacien comme régularisation. On remarque que plus  $p$  tend vers 0, moins la régularisation a d’importance et plus de détails tend à être gardé (ex : avec  $p = 0.2$  la mèche de cheveux est toujours présente alors qu’à partir de  $p = 0.4$  elle disparaît). Cela s’explique car l’énergie à régulariser est le  $p$ -Dirichlet ( $\frac{1}{p} \sum ||\nabla_w f||^p$ ) : lorsque  $p$  tend vers 0, la norme du gradient a de moins en moins d’importance, jusqu’à devenir constante.

Intéressons nous maintenant à la segmentation d’une image sur maillage.



FIGURE 4.5 – Filtrage d’image sur une tasse de thé.

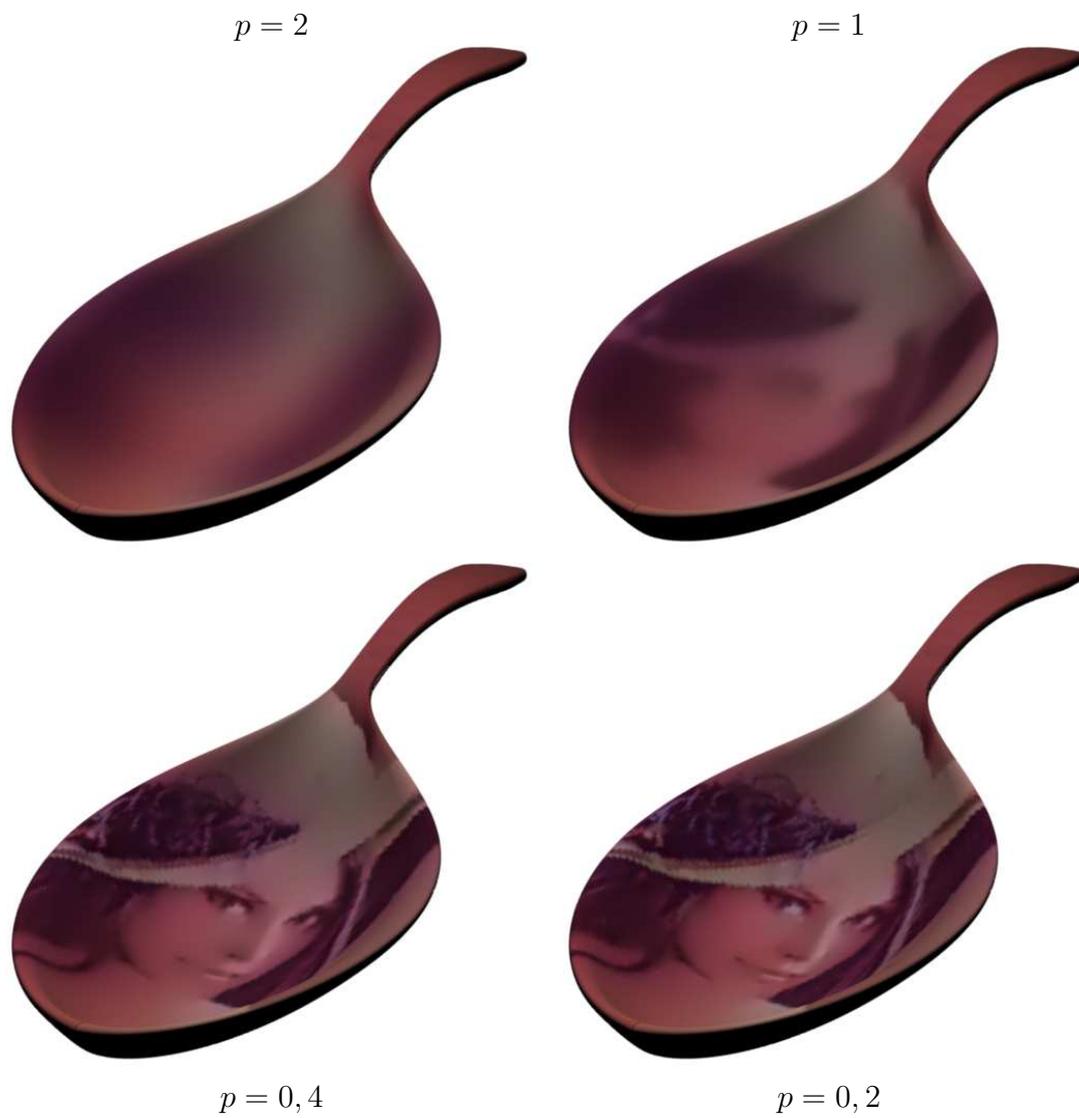


FIGURE 4.6 – Résultats de la régularisation de l'image Lena plaquée sur une cuillère, après 500 itérations, pour différentes valeurs du paramètre  $p$ , avec  $w = 1$ ,  $\frac{\partial E}{\partial f} = \Delta_w^p f$  et  $\Delta t = 0,1$ .

# 5 Segmentation d'une image sur maillage

## 5.1 Rappel

La segmentation d'image consiste à extraire des objets, ou à réaliser une partition de l'image. Parmi les différentes approches, les méthodes variationnelles et les EDPs sont de loin les plus utilisées et ont montrées leurs pertinences dans différentes applications. C'est le cas par exemple des contours actifs où dans ce cas l'extraction d'objets est réalisée par l'extraction de courbes. Cette évaluation est gouvernée par des EDPs géométriques contraignant l'information géométrique ou photométrique, et par une minimisation d'énergies.

Notre objectif est l'extension des méthodes des contours actifs basé sur la minimisation d'énergies.

Soit  $S$  la surface à analyser.  $f^0 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie sur la surface  $S$ . On note  $C$ , le contour de la segmentation, avec  $int(C)$  et  $ext(C)$ , respectivement l'ensemble des points  $p \in S$  internes au contour  $C$ , et l'ensemble des points  $p \in S$  externes au contour  $C$ .

On note  $f(x) = \chi_D(x) \in \{0, 1\}$ .

La segmentation par contour actif est exprimé par :

$$\arg \min_C \left\{ E(C, f^0, \lambda) = Per(C) + \lambda \left[ \int_{int(C)} F_{int} dx + \int_{ext(C)} F_{ext} dx \right] \right\} \quad (5.1)$$

avec  $Per(C)$ , le périmètre du contour  $C$ .  $F_{int}$  et  $F_{ext}$  sont des termes d'attaches aux données, respectivement interne et externe. Le périmètre  $Per(C)$  peut être exprimé comme :

$$Per(C) = \int_C ds \quad (5.2)$$

$$= \int_{\Omega} \|\nabla \chi_D(x)\|_1 dx \quad (5.3)$$

avec  $\chi_D(x) \in \{0, 1\}$  la fonction indicatrice, telle que :

$$\begin{cases} \chi_D(x) = 1 & \text{pour } x \in F_{int} \\ \chi_D(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.4)$$

On remarque  $f(x) = \chi_D(x)$ , donc on a :

$$Per(C) = \int_{\Omega} \|\nabla f(x)\|_1 dx \quad (5.5)$$

De même on peut réécrire le terme de droite de l'équation 5.16, pour qu'il dépend d' $\Omega$  :

$$\int_{int(C)} F_{int} dx + \int_{ext(C)} F_{ext} dx = \int_{\Omega} (\chi_D)(x) F_{int} dx + \int_{\Omega} (1 - \chi_D(x)) F_{ext} dx \quad (5.6)$$

L'équation 5.16 s'exprime maintenant comme :

$$\arg \min_C \left\{ E(C, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} \|\nabla f(x)\|_1 dx + \lambda \left[ \int_{\Omega} (\chi_D)(x) F_{int} dx + \int_{\Omega} (1 - \chi_D(x)) F_{ext} dx \right] \right\} \quad (5.7)$$

Soit  $g(f^0)(x) = F_{int}(x) - F_{ext}(x)$ , l'équation 5.16 peut être reformulée comme :

$$\arg \min_{f(x) \in \{0,1\}} \left\{ E(C, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} \|\nabla f(x)\|_1 dx + \lambda \int_{\Omega} g(f^0)(x) f(x) dx \right\} \quad (5.8)$$

Cette énergie n'est pas convexe, nous procédons à une relaxation pour la convexifier, en faisant en sorte que  $f(x) \in [0, 1]$ , ainsi :

$$\arg \min_{f(x) \in [0,1]} \left\{ E(C, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} \|\nabla f(x)\|_1 dx + \lambda \int_{\Omega} g(f^0)(x) f(x) dx \right\} \quad (5.9)$$

On pose :

$$f^t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.10)$$

L'énergie  $E(C, f^0, \lambda)$  vérifie la formule du co-aire, on a :

$$E(C, f, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(C, f^t, \lambda) \quad (5.11)$$

Ansı toute fonction du problème relaxé ( $E(C, f^t, \lambda)$ ) est solution du problème original ( $E(C, f, \lambda)$ ). L'équation Euler-Lagrange donne :

$$\frac{\partial E(f)}{\partial f(x)} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) + g \quad (5.12)$$

La solution est obtenue en faisant une descente de gradient :

$$\begin{cases} f^{(t+1)} & = f^{(t)} - \Delta t \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) + g \right) \\ f^{(0)} & = f^0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Vu que le calcul de  $f$  se fait dans  $\mathbb{R}$ , nous devons projeter à chaque itération sur l'intervalle  $[0, 1]$ , en faisant :

$$f = \min \{ \max \{ f, 0 \}, 1 \} \quad (5.14)$$

## 5.2 Extension sur graphe

Soit  $G(V, E, w)$ , le graphe représentant le maillage à analyser. La donnée à traiter est une fonction  $f^0 : V \rightarrow L$  avec  $L \in \{0, 1\}$  : l'ensemble des labels possibles. L'énergie à minimiser sur graphe s'écrit :

$$\arg \min_{f(x) \in \{0,1\}} \left\{ E(C, f^0, \lambda) = \sum_{u \in V} \|\nabla_w f(u)\|_1 + \lambda \sum_{u \in V} g(f^0)(u) f(u) \right\} \quad (5.15)$$

Cette énergie n'est pas convexe, nous la relaxons pour la convexifier en faisant en sorte que  $L \in [0, 1]$ ,  $L$  appartient maintenant à un intervalle continue. En utilisant la formule des co-aires sur graphe (voir [Ta09]), nous montrons que l'énergie non relaxée et l'énergie relaxée ont le même minimum pour  $p = 1$  ou  $p = \infty$  (ici nous traitons le cas pour  $p = 1$  seulement). L'énergie  $E(C, f^0, \lambda)$  s'écrit maintenant :

$$\arg \min_{f(x) \in [0,1]} \left\{ E(C, f^0, \lambda) = \sum_{u \in V} \|\nabla_w f(u)\|_1 + \lambda \sum_{u \in V} g(f^0)(u) f(u) \right\} \quad (5.16)$$

De même nous pouvons travailler avec  $f \in \mathbb{R}$  puis projeter sur l'intervalle  $[0, 1]$  à chaque fin d'itération, l'énergie à minimiser devient :

$$\arg \min_{f(x) \in \mathbb{R}} \left\{ E(C, f^0, \lambda) = \sum_{u \in V} \|\nabla_w f(u)\|_1 + \lambda \sum_{u \in V} g(f^0)(u) f(u) \right\} \quad (5.17)$$

Soit  $C \in \mathbb{R}$  l'espace des couleurs, typiquement un niveau de gris. Soit la fonction  $c : V \rightarrow C$ , assignant une couleur à chaque nœud. Soit  $\mu_0, \mu_1 \in C$ , respectivement la moyenne colorimétrique de la classe 0 et de la classe 1. Nous définissons  $g(x)$  comme :

$$g(x) = (c(x) - \mu_0)^2 - (c(x) - \mu_1)^2 \quad (5.18)$$

La solution du problème s'obtient lorsque :

$$\frac{\partial E_{r,w}(f)}{\partial f(u)} = 0, \forall u \in V \quad (5.19)$$

En utilisant l'expression du 1-Laplacien anisotrope, nous obtenons l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$(\Delta_{w,1}^a f)(u) + \lambda g(f^0)(u) = 0, \forall u \in V \quad (5.20)$$

## 5.3 Autre méthode de régularisation

Nous pouvons améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme en utilisant le Split Bregman pour supprimer le traitement de régularisation (voir [GO09]). Nous commençons par substituer le gradient par la variable  $\nabla_w u$  par  $\vec{d}$ , l'énergie  $E(f, c, \lambda)$  doit être modifier en conséquence pour forcer cette nouvelle contrainte. L'énergie à minimiser s'écrit maintenant :

$$E(f, d, c, \lambda) = \sum_{u \in V} |\vec{d}| + \lambda g(f^0)(u) f(u) + \frac{\alpha}{2} \|\vec{d} - \nabla_w f - \vec{b}\|^2 \quad (5.21)$$

avec  $\vec{b}^{(t+1)} = \vec{b}^{(t)} + \nabla_w f^{(t)} - \vec{d}^{(t)}$ , l'erreur d'accumulation lié à l'égalité entre  $\vec{d}$  et  $\nabla_w u$ .  $\alpha$  une pondération pour influencer sur l'importance de la contrainte  $\vec{d} \leftarrow \nabla_w u$ .

Pour minimiser l'énergie  $E(f, c, \lambda)$  par rapport à  $\vec{d}$  nous faisons :

$$d^{(t+1)} = \text{shrink}(\nabla u + b^{(t)}, \alpha) \quad (5.22)$$

Le minimum global par rapport à  $f$  est atteint lorsque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(f, d, c, \lambda)}{\partial f(x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda r(x) + \alpha \text{div}(\vec{d}(x) - \nabla_w f(x) - \vec{b}^{(t)}(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla_w f(x) &= \frac{\lambda}{\alpha} r(x) + \text{div}(\vec{d}^{(t)}(x) - \vec{b}^{(t)}(x)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Développons les opérateurs sur graphe (voir équations 3.20 et 3.17) de l'équation 5.23 :

$$\sum_{j \sim i} w_{ij} (f_i - f_j) = \frac{\lambda}{\alpha} r(x) + \sum_{j \sim i} \sqrt{w_{ij}} (d_{ij}^{(t)}(x) - b_{ij}^{(t)}(x) - d_{ji}^{(t)}(x) + b_{ji}^{(t)}(x)) \quad (5.24)$$

$$\Leftrightarrow f_i = \frac{\sum_{j \sim i} w_{ij} f_j + \frac{\lambda}{\alpha} r(x) + \sum_{j \sim i} \sqrt{w_{ij}} (d_{ij}^{(t)}(x) - b_{ij}^{(t)}(x) - d_{ji}^{(t)}(x) + b_{ji}^{(t)}(x))}{\sum_{j \sim i} w_{ij}} \quad (5.25)$$

En utilisant la méthode des points fixes nous obtenons le système de résolution suivant :

$$\begin{cases} f^{(t+1)} = \min \left( \max \left( \frac{\sum_{j \sim i} w_{ij} f^{(t)} + \frac{\lambda}{\alpha} r(x) + \sum_{j \sim i} \sqrt{w_{ij}} (d_{ij}^{(t)}(x) - b_{ij}^{(t)}(x) - d_{ji}^{(t)}(x) + b_{ji}^{(t)}(x))}{\sum_{j \sim i} w_{ij}}, 0 \right), 1 \right) \\ \vec{b}^{(t+1)} = \vec{b}^{(t)} + \nabla_w f^{(t)} - \vec{d}^{(t)} \\ f^{(0)} = f^0 \end{cases} \quad (5.26)$$

## 5.4 Application

Pour ce traitement, nous devons à nouveau appliquer une subdivision sur l'image, pour traiter finement l'information colorimétrique de l'image. La figure 5.1 affiche l'évolution d'une segmentation supervisée de l'image du caméraman sur un bol. La figure 5.2 montre le même traitement mais sur une topologie différente, nous voyons que l'algorithme à base de graphe est bien indépendante de la topologie sous-jacente.

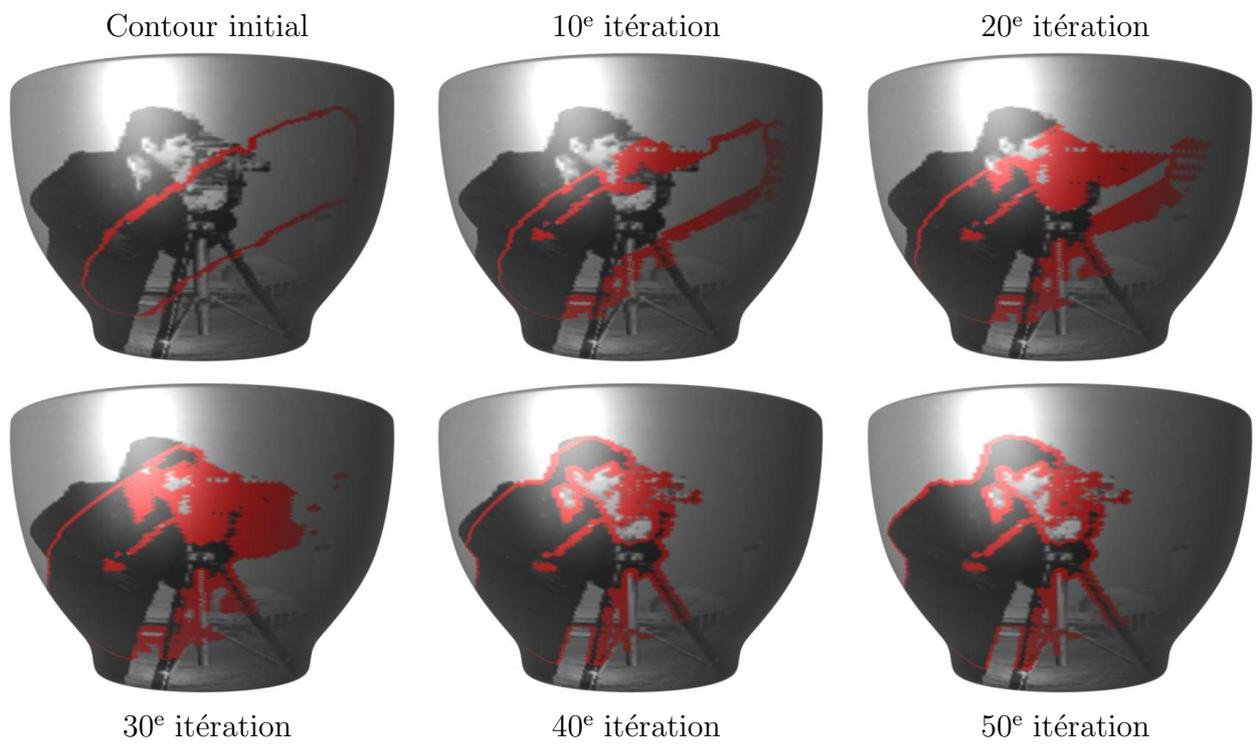


FIGURE 5.1 – Segmentation du caméraman.

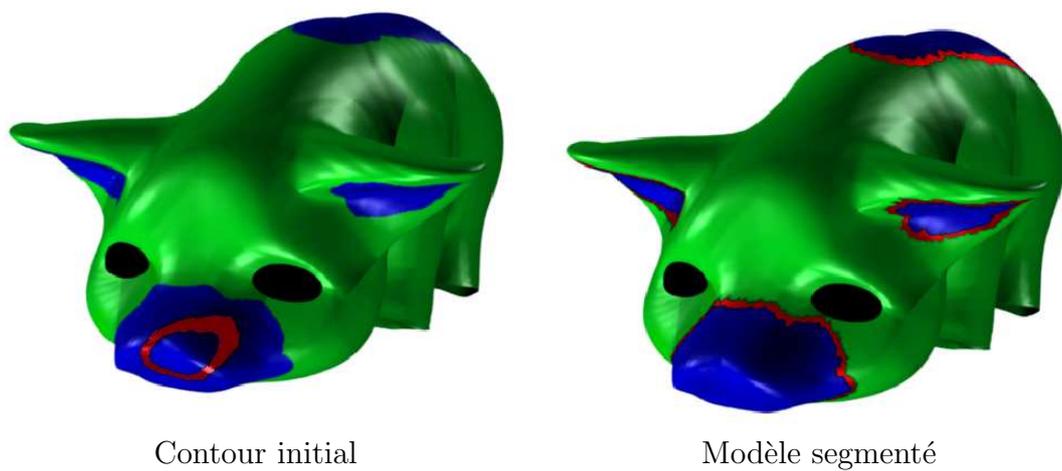


FIGURE 5.2 – Segmentation du cochon. Les contours sont en rouge.

## 6 Conclusion

Dans une première partie, nous avons présenté les différentes approches pour analyser l'image sur une surface : la représentation implicite, la représentation explicite et l'approche par graphe. Après nous avons détaillé la formulation de différents traitements, puis leurs mises en applications avec affichages de résultats. L'approche par graphe permet de travailler directement sur des données discrètes, et de traiter ces données là en utilisant les EdPs. Les opérateurs obtenus restent paramétrables, ainsi la fonction de similarité  $w$  peut dépendre d'informations géométriques ou photométriques (voir les équations 5.13, 4.15 ou encore 5.26). D'autres traitements sont possibles, comme l'inpainting, la génération de texture.

Les traitements présentés travaillent uniquement avec des informations locales. Comme nous l'avons vu dans le résultat avec le filtrage d'une texture sur une surface (voir section 4.2.2), il serait intéressant de travailler avec une information non local pour préserver au mieux la texture. Dans le traitement d'image sur graphe, l'information non locale existe grâce à la notion de patch, représentant une collection de pixels voisins autour d'un pixel. Mais comment introduire la notion de patch dans l'étude d'image sur surface 3D ? Comment comparer deux patches entre eux ? Comment introduire un ordre de comparaison de patch ? Ces questions vont trouver leurs réponses dans le cadre de ma thèse.

# Bibliographie

- [AGLM93] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre Louis Lions, and Jean Michel Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 123 :199–257, 1993. 10.1007/BF00375127.
- [AK06] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (second edition)*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2006.
- [BCOS01] M. Bertalmio, L.T. Cheng, S.J. Osher, and G. Sapiro. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces. 174 :759–780, 2001.
- [BEM09] Sébastien Bogleux, Abderrahim Elmoataz, and Mahmoud Melkemi. Local and nonlocal discrete regularization on weighted graphs for image and mesh processing. *International Journal of Computer Vision*, 84 :220–236, 2009. 10.1007/s11263-008-0159-z.
- [BG94] A. Bakushinsky and A. Goncharsky. *Ill-posed problems : Theory and Applications*, volume 301 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1994.
- [BSCO00] Marcelo Bertalmio, Guillermo Sapiro, Li-Tien Cheng, and Stanley Osher. A framework for solving surface partial differential equations for computer graphics applications, 2000.
- [Bur08] M. Burger. Finite element approximation of elliptic partial differential equations on implicit surfaces. *Comp. Vis. Sci.*, 2008.
- [CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological surfaces. 10(6) :350–355, November 1978.
- [COS01] Tony F. Chan, Stanley Osher, and Jianhong Shen. The digital tv filter and nonlinear denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :231–241, 2001.
- [CS05] Tony F. Chan and Jianhong Shen. *Image processing and analysis - variational, PDE, wavelet, and stochastic methods*. SIAM, 2005.
- [CSZ06] Olivier Chapelle, Bernhard Schölkopf, and Alexander Zien. *Semi-Supervised Learning*. MIT Press, 2006.
- [ELB08] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bogleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : a framework for image and manifold processing. *IEEE Trans Image Process*, 17(7) :1047–60, 2008.
- [GO09] Tom Goldstein and Stanley Osher. The split bregman method for l1-regularized problems. *SIAM J. Imaging Sciences*, 2(2) :323–343, 2009.
- [JR94] J.M. Jolion and A. Rosenfeld. *A Pyramid Framework for Early Vision : Multiresolution Computer Vision*. Book, 1994.

- [NBW06] Mark Newman, Albert-László Barabási, and Duncan J. Watts. *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, 2006.
- [PDS04] Lucero Lopez Perez, Rachid Deriche, and Nir A. Sochen. The Beltrami flow over triangulated manifolds. In *ECCV Workshops CVAMIA and MMBIA'04*, pages 135–144, 2004.
- [PM87] P. Perona and J. Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. In *Proc. Workshop on Computer Vision, Representation and Control*, pages 16–22. IEEE Computer Society, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1987.
- [ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1-4) :259 – 268, 1992.
- [Sta03] Jos Stam. Flows on surfaces of arbitrary topology. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3) :724–731, July 2003.
- [Ta09] Vinh-Thong Ta. *Équations aux différences partielles définies sur des graphes pour le traitement d’images et de données*. PhD thesis, Université de Caen Basse-Normandie, France, 2009. december 2009.
- [TEL11] Vinh-Thong Ta, Abderrahim Elmoataz, and Olivier Lézoray. Nonlocal PDEs-based morphology on weighted graphs for image and data processing. *IEEE transactions on Image Processing*, 2011. To appear, accepted with minor revisions.